MATEMÁTICAS ACADÉMICAS 4º ESO A. CUARTA QUINCENA.

Estimado alumnado. En esta nueva quincena vamos a recordar las ecuaciones y las inecuaciones vistas a lo largo del segundo trimestre, y lo vamos a aplicar al cálculo del dominio de funciones dadas sus expresiones analíticas. También, para que no se nos olvide lo aprendido hasta ahora vamos a recordar los intervalos y los radicales. Organícense bien, que hay tiempo para todo.

Para los envíos de tareas o para consultar las dudas que les surjan ustedes tienen un par de canales para ello, por un lado (y más recomendable) mi cuenta de correo electrónico:

franciscojose.morasalas@iesviaverde.es

o bien, mi cuenta de Instagram, creada para esta época excepcional:

@matesviaverdefrancisco

Para realizar las siguientes actividades ponemos unos ejemplos de cálculo de dominio de definición de una función. Si no comprenden algo, no duden en hacérmelo saber y pregunten sus dudas lo más pronto posible.
El dominio de definición de una función son todos los valores de la variable x que al sustituirlos en la expresión analítica de la función (la fórmula) hacen que se pueda calcular, o sea, de un número real.
El dominio de definición se puede expresar de varias maneras, como D, $D(f)$, $Dom(f)$.

- Por ejemplo, si $f(x) = x^2 - 3x$ se trata de una función polinómica. Si damos un valor cualquiera a la letra x al hacer las operaciones, sale siempre un número real. En este caso $Dom(f) = \Re = (-\infty, +\infty)$.

Si la función es un polinomio, el dominio de definición de la función son todos los números reales.

- En el caso de las funciones racionales, es decir, cocientes de polinomios, hemos de tener en cuenta que lo único que hace que no sea real el número al calcular cualquier valor numérico de la expresión es que el denominador sea 0, y eso se alcanzará igualando dicho denominador a cero. Por tanto, el dominio de un cociente de polinomios serán todos los números reales, salvo aquellos valores que anulen el denominador. (Bastará con resolver una ecuación).

Veamos un par de ejemplos:

1º) $f(x) = \dfrac{x}{3x-6}$

Lo primero que hacemos es igualar el denominador a 0:
$3x - 6 = 0$. Nos queda una ecuación, en este caso de primer grado, para resolver.
La resolvemos y nos queda:

$$3x - 6 = 0$$
$$3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow x = 2$$

Como $x = 2$ es el único valor de x que anula el denominador, se tiene que
$Dom(f) = \Re - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

2º) $f(x)=\dfrac{x^4-1}{x^2-3x-4}$

Nuevamente, igualamos a cero el denominador para ver los puntos que no serán del dominio.

$$x^2-3x-4=0 \Rightarrow \begin{matrix} a=1 \\ b=-3 \\ c=-4 \end{matrix} \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=$$

$$=\frac{3\pm5}{2}=\begin{matrix} \dfrac{3+5}{2}=\dfrac{8}{2}=4 \\ \\ \dfrac{3-5}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1 \end{matrix}$$

Como podemos ver, -1 y 4 son los valores de la variable x que anulan el denominador. Por tanto, se tiene que $Dom(f)=\Re-\{-1,4\}=(-\infty,-1)\cup(-1,4)\cup(4,+\infty)$

3º) $f(x)=\dfrac{x^{2020}}{x^2+1}$. Al tratarse de un cociente de polinomios, habrá que tener en cuenta los valores que anulan el denominador.

Por tanto, habrá que resolver $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-1}$, que no es un número real.

En consecuencia, $Dom(f)=\Re$

Si la función es un cociente de polinomios, el dominio será todos los números reales excepto aquellos valores de x que anulan en denominador. ***En caso que no haya ningún valor real que anula el denominador el dominio serán todos los números reales.***

- Si la función es una raíz de índice impar, como se puede calcular para cualquier expresión real, el dominio será el mismo que el dominio del radicando.

Ejemplos: $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$. Como el índice de la raíz es impar, el dominio de la función coincide con el dominio del radicando, que en este caso es $x-2$, que es un polinomio y cuyo dominio son todos los números reales. Así pues, podemos escribir $Dom(f)=\Re$

Sin embargo, para la función $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{1}{x-3}}$, el dominio es el mismo que el de la expresión $\dfrac{1}{x-3}$, que es un cociente de polinomios, cuyo denominador se anula para $x=3$, haciendo la ecuación $x-3=0$. Con lo cual expresaremos $Dom(f)=\Re-\{3\}=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$

- Para funciones raíces de índice par, como son las raíces cuadradas, las raíces cuartas, las raíces sextas, octavas, décimas, etcétera, sabemos que el radicando ha de ser mayor o igual que cero para poder calcularlos. En caso de ser negativo, no es un número real.

Por tanto, cuando se trate de una función cuya expresión sea una raíz de índice par lo primero será imponer que el radicando sea mayor o igual que cero y resolver una inecuación.

Veamos varios ejemplos:

1º) $f(x)=\sqrt{x-3}$. Al tratarse de una raíz cuadrada, solamente se puede calcular cuando el radicando, que en este caso es $x-3$ sea mayor o igual que 0;
$x-3\geq 0$. Al resolver la inecuación nos queda $x\geq 3$, y en consecuencia el dominio serán todos los valores de *x* que son mayores o iguales que 3. (Van de 3 a más infinito)
$Dom(f)=[3,+\infty)$

2º) $f(x)=\sqrt[4]{4-2x}$
Para calcular el dominio de la función se ha de cumplir, al tratarse de una raíz de índice par, que $4-2x\geq 0$, resolviendo la inecuación de primer grado se tiene que $x\leq 2$. En consecuencia el dominio será: $Dom(f)=(-\infty,2]$

3º) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$. Hemos de imponer para calcular el dominio de definición que $x^2-4x+3\geq 0$. Resolvemos la inecuación:

$$x^2-4x+3\geq 0 \rightarrow x^2-4x+3=0 \quad \begin{pmatrix} a=1 \\ b=-4 \\ c=3 \end{pmatrix}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=3\\ \frac{4-2}{2}=1\end{cases}$$

$$+ \quad - \quad +$$
$$1 \qquad 3$$

Por tanto $Dom(f)=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

4º) $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{2x+4}{x-3}}$. Al tratarse de una función radical (que tiene raíces) de índice cuatro, hemos de poner en primer lugar que $\dfrac{2x+4}{x-3}\geq 0$. Lo resolvemos:

$$\frac{2x+4}{x-3}\geq 0 \rightarrow$$

$$2x+4=0 \qquad 2x=-4 \qquad x=\frac{-4}{2}=-2 \qquad \boxed{x=-2}$$

$$x-3=0 \qquad \boxed{x=3}$$

$$x=-3:\ \frac{2\cdot(-3)+4}{-3-3}=\frac{-6+4}{-6}=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}\,(+)$$

$$x=0:\ \frac{2\cdot0+4}{0-3}=\frac{0+4}{-3}=\frac{4}{-3}\,(-)$$

$$x=4:\ \frac{2\cdot4+4}{4-3}=\frac{8+4}{1}=12\,(+)$$

$$+ \quad - \quad +$$
$$-2 \qquad 3$$

$Dom(f)=(-\infty,-2]\cup(3,+\infty)$

ACTIVIDADES MATEMÁTICAS ACADÉMICAS CUARTA QUINCENA.

1. Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 7x + 6}$

c) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 2x + 7}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^{2019} - 1}$

e) $f(x) = x^4 - x^3 + x^2$

f) $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{1}{x}}$

g) $f(x) = \sqrt[13]{x+1}$

h) $f(x) = \sqrt[2020]{x^2 - 16}$

i) $f(x) = \sqrt[7]{x^3 + 8x}$

j) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$

k) $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x}{x-7}}$

l) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-9}{4-x}}$

ACTIVIDADES DE REPASO DE INTERVALOS Y RADICALES

1. a) Expresa en forma analítica de intervalos, en forma gráfica y en forma de conjuntos:

a.1) $(2,3)$ a.2) $[4,2]$ a.3) [4,9) a.4) (0,3]

b) Representa y expresa en forma de conjunto las semirrectas

b.1) $[3,+\infty)$ b.2) $(-\infty$,-2)

2. Expresa las siguientes raíces en forma de potencia y viceversa:

a) $2016^{\frac{2}{5}}$ b) $\sqrt{19^{37}}$ c) $\left(\sqrt[4]{a}\right)^5$

3. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[8]{64}$

b) $\sqrt[15]{729}$

c) $\sqrt[9]{216}$

d) $\left(\sqrt[22]{z}\right)^{99}$

4. Realiza las siguientes operaciones con radicales:

a) $\sqrt[4]{12} \cdot \sqrt[6]{18}$

b) $\sqrt[3]{36} : \sqrt[9]{1296}$

c) $3\sqrt{28} - 2\sqrt{63} - 5\sqrt{112} + 9\sqrt{175}$

d) $\sqrt{f\sqrt[3]{\sqrt[9]{\sqrt{f}}}}$

5. Racionaliza:

a) $\dfrac{14}{\sqrt{28}}$ b) $\dfrac{4}{\sqrt[6]{8}}$ c) $\dfrac{6\sqrt{2}}{4 - \sqrt{13}}$